Quatre Problèmes sur de Nouvelles Courbes

Alexis Clairaut

Abstract

Alexis Clairaut, born in 1713 to mathematician and teacher Jean-Baptiste Clairaut and mother Catherine, was a mathematician who showed promise from a very young age. In 1726 he presented on four new families of curves and their properties to the French Royal Academy of Sciences. Clairaut published these findings in 1734 as "Quatre Problèmes sur de Nouvelles Courbes" ("Four Problems on New Curves") in the fourth volume of the journal of the Royal Prussian Academy of Sciences, *Miscellanea berolinensia ad incremental scientiarum*. Each of the four families of algebraic curves that he investigated was partly motivated by the classical Greek problem of finding mean proportionals between two given line segments. Clairaut also investigated the analytic properties of his curves by finding tangents, inflection points, and quadratures.

Clairaut's 1734 paper, written and published in French, has not yet been translated to English. We present a dual language edition—French and English—to make Clairaut's paper accessible by a modern audience. The English edition is available via the companion article "The Four Curves of Alexis Clairaut." Both versions include images of Clairaut's diagrams, scanned from the copy of *Miscellanea berolinensia* owned by The Rare Book & Manuscript Library, University of Illinois at Urbana Champaign. The English edition also includes versions of Clairaut's diagrams created in GeoGebra, with links to interactive renderings of those diagrams.

Editorial Conventions

In transcribing Clairaut's text, we remained faithful to his sentence structure, grammar, and word choice. We did, however, modernize antiquated spellings and add accenting as appropriate for modern French. We also expanded abbreviations. The original spelling, accenting, or abbreviations are given in critical apparatus, which appear as a collection of footnotes on the French pages. The lines of the text are numbered for reference, but the reader should note that line numbers do not appear in the original text and do not correspond in any way to the lines of the original text.

For the mathematical content of the French transcription, we maintained the notation Clairaut chose as much as possible. For example, Clairaut often used expressions such as

$$\sqrt{xx+yy},$$

and we have preserved these as much as is possible with LaTeX.

The critical apparatus for the French consists of three groupings:

- *Group A: Textual.* These footnotes indicate textual changes, such as a modernization of spelling or accenting. For example, the word "côtez" appears in the original text, but we have updated it to read "côtes". The verb côtes appears in the main text, and the corresponding footnote reads "2 côtes] côtez." The number corresponds to the line number on which the word occurs; the word preceding the bracket indicates the spelling in our edition; the word after the bracket indicates the spelling in the original.

- *Group B: Reading.* These notes are intended to clarify the meaning of a word in French. For example, Clairaut used the word "quarrant". This is, however, an antiquated word; a modern equivalent would be the word "carrer" ("to square").

- *Group C: Mathematical.* These notes indicate corrections to the mathematical content. For example, Clairaut's original text has x^{n+1} in a place where it should be x^{n+2}. These notes also indicate issues with the diagrams, such as an omitted label in Clairaut's original.

In both the English and French versions, we have taken the liberty of placing most of the mathematical notation on its own line. The source text prints them in-line, and this is often detrimental to the readability of complicated notation. Equations count as a new line for the purposes of line numbering, and each equation is numbered in the usual LaTeXstyle.

The mathematical expressions are formatted in two ways. Points are given in "math bold" style, e.g. the point $\mathbf{A}$ or the point $\mathbf{n}$. Algebraic quantities are given in standard LaTeX italics, e.g. x, y, a, m, n. This was necessary in order to distinguish the points $\mathbf{a}$ and $\mathbf{n}$ from the algebraic quantities a and n, as Clairaut used both throughout the paper. This is also advantageous because it distinguishes between the point $\mathbf{a}$, the algebraic quantity a, and the common French verb "a", a conjugation of "avoir".

I Problème Indéterminé.

Un angle droit **ACQ** avec un point fixe **A** (fig. 1) sur un de ses côtes étant donnez sur un plan; On demande la nature de la courbe, dont la propriété est telle, que le quarre d'une perpendiculaire **MQ** sur **CQ** soit égal au rectangle sous la constante **AC** et la droite **CM** qui part toujours du point fixe **C** à un point quelconque de la courbe.

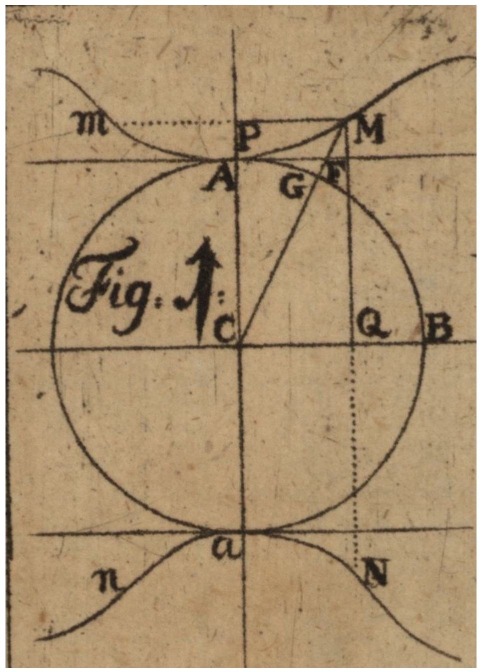

Figure 1

1. Ayant supposé le Problème résolu, soit mené **MP** parallèle à **CQ** et nommé la donnée **AC**, a; et les indéterminées **CP** ou **MQ**, x; et **PM** ou **CQ**, y; **CM** sera

$$\sqrt{[xx+yy]}. \tag{I.1}$$

Et l'on aura, en exprimant la propriété de la Courbe

$$a\sqrt{[xx+yy]} = xx \tag{I.2}$$

2 côtes] côtez
2 étant] etant
3 propriété] proprieté
7 Problème] Probleme
7 résolu] resolu
8 indéterminées] indeterminées

ou en quarrant chaque membre

$$x^4 = a^2x^2 + a^2y^2, \tag{I.3}$$

qui est une equation du 4^me^ degré et qui fait voir que la courbe est du 3^me^ genre.

2. On tire de cette Equation

$$x = \pm\sqrt{[}\sqrt{[}aayy + \tfrac{1}{4}a^4] + \tfrac{1}{2}aa] \tag{I.4}$$

d'où l'on voit, que la courbe passe dès deux côtes de l'axe, ayant deux parties égales et semblables en dessus et en dessous; c'est-à dire, qu'il y a deux parties **AM**, **Am**, qui n'en font qu'une **mAM**, qui prend son origine en **A** autant distant de **C** que **a** qui est l'origine des deux autres parties **aN**, **an**, qui n'en font aussi qu'une **naN** égale à la première.

3. On voit clairement dans la valeur de x ou de y, que x augmentant, y augmente aussi et qu'ainsi x, étant infini, y l'est aussi.

4. Comme la propriété de cette Courbe ressemble en quelque façon à celle de la Parabole, on peut former une Equation générale

$$x^m = \sqrt{[}xx + yy] \tag{I.5}$$

(en regardant a, comme l'unité et $m > 1$ toujours) pour en exprimer la nature à tous les dégrées à l'infini de même que l'on fait

$$x^m = y \tag{I.6}$$

pour exprimer la nature de toutes les Paraboles.

5. A cause que cette Courbe a encore pour propriété que, si l'on décrit un quart de cercle **AGB** qui ait pour centre **C**, et pour rayon **AC**; **CF** est moyenne proportionnelle entre **CG** et **CM**, on la peut encore généraliser à l'infini, en supposant que **CF** est la première de deux moyennes proportionnelles, ou plutôt d'un certain nombre n, entre **CG** et **CM**, pour en avoir l'equation générale on fera ainsi: En nommant toujours **CP**, x; **PM**, y; **CM** est

$$\overline{xx + yy}^{\frac{1}{2}} \tag{I.7}$$

et **CF**

$$\tfrac{a}{x}\overline{xx + yy}^{\frac{1}{2}}; \tag{I.8}$$

---

17 côtes] cotez
18 **Am**] This is incorrectly given as **am** in the original.
20 première] premiere
27 dégrées] dégrez
32 **CM**] This is incorrectly given as **GM** in the original.
32 première] premiere

---

12 quarrant] carrer, or élever au carré
19 **a**] The point labelled **a**, not from avoir

et l'on a par la propriété des continuelles proportionnelles,

$$1 \,.\, 1 :: \frac{a}{x} \,.\, \frac{a}{x^{n+2}}[xx+yy]^{\frac{n}{2}} \tag{I.9}$$

car

$$a \,.\, [xx+yy]^{\frac{1}{2}} :: a^{n+1} \,.\, \frac{a^{n+1}}{x^{n+1}}[xx+yy]^{\frac{n+1}{2}} \tag{I.10}$$

ce qui se réduit à cette Equation

$$x^{\frac{n+1}{n}} = \sqrt{[xx+yy]} \tag{I.11}$$

qui est l'equation cherchée, et qui devient la même que celle qu'on a trouvée No. 4 en faisant $\frac{n+1}{n} = m$.

6. Si dans la première Equation générale l'on fait $m = \frac{3}{2}$, ou ce qui est la même chose, si l'on fait $n = 2$ dans le seconde [équation], c'est-a-dire que l'on demande la courbe, où **CF** est la première de deux moyennes proportionnelles entre **CG** et **CM**, l'equation devient

$$x^3 = axx + ayy \tag{I.12}$$

qui fournit cette construction (fig. 2) pour trouver un point de la courbe, supposant **CP** x déterminé à chaque fois; Faites sur **CP** un demi-cercle qui coupera **AF** au point **F**, par où ayant tiré la droite **CF**, elle coupera **PM** au point cherché **M**.

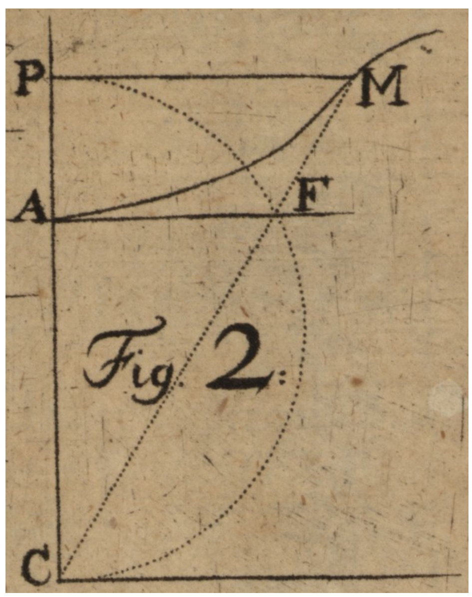

Figure 2

42 réduit] reduit
46 première] premiere
48 première] premiere

39 x^{n+2} is incorrectly given as x^{n+1} in the original.

7. Une de ces courbes quelconque étant donnée avec son axe et son quart de cercle générateur, on peut par son moyen trouver entre deux lignes la 1[re] du nombre n de moyennes proportionnelles (pourvu que le nombre n convienne à la puissance de la courbe donnée). Par exemple, si l'on veut trouver entre deux lignes données la première de deux moyennes proportionnelles, on ne pourra se servit que de la courbe construite No. 6 en cette sorte.

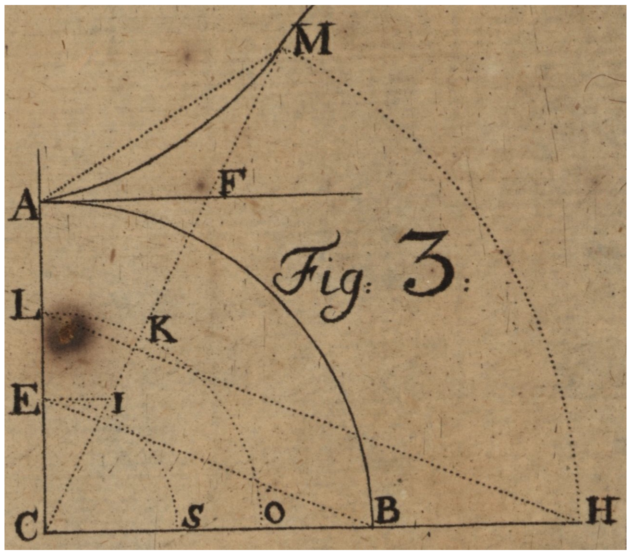

Figure 3

Ayant (fig. 3) fait sur **CH** les deux quarts de cercle **ES**, **LO**, dont le premiere **ES** ait pour rayon la plus petite des deux lignes données et le second la plus grande, On fera du point **C**, comme centre et du rayon **CH** l'arc de cercle **MH**, qui coupera la courbe donnée **AM** au point **M**, duquel on mènera la droite **MC**, et on tirera les lignes **AM**, **EK**: il est clair par la construction qu'elles seront parallels, et par conséquent qu'elles rendront semblables les Triangles **CEK**, **CAM**: et faisant aussi **EI** parallel à **AF**, ces deux parallels **EI**, **AF** couperont **CK**, **CM** semblablement, et c'est pourquoi **CF** étant la première de deux moyennes proportionnelles entre **AC** et **CM**; **CI** sera aussi la première de deux moyennes proportionnelles entre les deux lignes données **CE**, **CL** ou **CK**.

51 première] premiere
54 **ES**] **Es**
57 mènera] menera
60 étant] etant
60 première] premiere
61 première] premiere

8. Pour mener une tangente par un point donné dessus, on se servira de l'equation générale

$$x^m = \sqrt{[xx+yy]} \tag{I.13}$$

en cette forte (fig. 4).

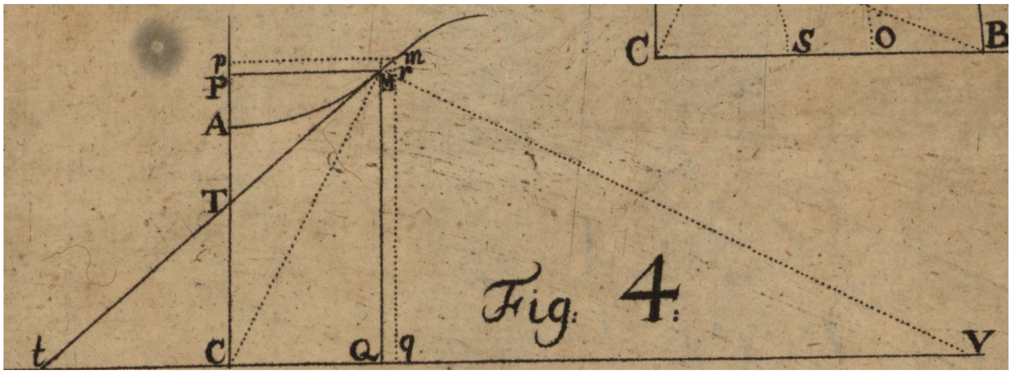

Figure 4

Premier cas: Si l'on veut avoir la sous-tangente sur l'axe des x **AC**; elle sera par les triangles semblables **MRm**, **MPT**, égale à

$$\frac{y\,dx}{dy} \tag{I.14}$$

et on aura, en prenant les différentielles de l'equation générale,

$$x^m = \sqrt{[xx+yy]}, \tag{I.15}$$

$$mx^{m-1}\,dx = \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{[xx+yy]}} \tag{I.16}$$

d'où l'on tire **PT**

$$\frac{y\,dx}{dy} = \frac{yy}{mx^{m-1}\sqrt{[xx+yy]} - x} \tag{I.17}$$

$$= \frac{yy}{mx^{2m-1} - x} \tag{I.18}$$

$$= \frac{yy}{\frac{n+1}{n}x^{\frac{n+2}{n}} - x} \tag{I.19}$$

en mettant pour m la valeur $\frac{n+1}{n}$ et si $m = 2$, ou bien $n = 1$ elle devient

$$\frac{aayy}{2x^3 - aax} \tag{I.20}$$

à cause que $a = 1$; et si $m = \frac{3}{2}$ ou $n = 2$ elle devient

$$\frac{2ayy}{3xx - 2ax}. \tag{I.21}$$

---

64 égale] egale

66 différentielles] differencielles

Second cas: Si l'on veut avoir la sous-tangente sur l'axe **CQ** des y, on aura par les triangles semblables **mrM**, **MQt**, cette sous-tangente qui est **Qt**, sera

$$= \frac{x\,dy}{dx} \tag{I.22}$$

et par la difference de l'equation générale elle deviendra

$$\frac{mxx + myy - xx}{y} = \frac{\overline{m-1}\,x^2 + my^2}{y} \tag{I.23}$$

ou en mettant pour m sa valeur $\frac{n+1}{n}$,

$$\mathbf{Qt} = \frac{\frac{1}{n}xx + \frac{n+1}{n}yy}{y} \tag{I.24}$$

et si l'on fait $m = 2$ ou $n = 1$ l'on a

$$\mathbf{Qt} = \frac{xx + 2yy}{y} \tag{I.25}$$

qui fournit cette construction. Elevez au point **M** un perpendiculaire **MV** sur **CM**, qui coupera **CQ** au point **V**, et on prendra **CV** que l'on mettra de l'autre côté, afin d'avoir

$$\mathbf{Qt} = \frac{xx + yy}{y} + y = \frac{xx + 2yy}{y} \tag{I.26}$$

C.Q.F.F. Si $m = \frac{3}{2}$ ou $n = 2$, sera

$$\frac{xx + 3yy}{2y}. \tag{I.27}$$

9. Il faut remarquer dans la sous-tangente

$$\frac{y\,dx}{dy} \tag{I.28}$$

que si on en ôte **AP**, $x - a$ afin d'avoir la partie **AT**, elle sera positive, jusqu'à un certain point, après quoi elle sera negative, et ce point sera un point d'inflexion, que l'on peut determiner en général de cette sorte, par l'equation formée No. 4.

$$\text{A.}\quad x^m = \sqrt{[xx + yy]}. \tag{I.29}$$

$$\text{B.}\quad y = \sqrt{[x^{2m} - xx]}. \tag{I.30}$$

$$\text{C.}\quad dy = \frac{mx^{2m-1}\,dx - x\,dx}{\sqrt{[x^{2m} - xx]}} \tag{I.31}$$

---

77 **MQt**] Clairaut's original has **T** for **t** in several (but not all) places.
83 $n = 1$] This is printed as $n - 1$ in the original.

---

88 C.Q.F.F.] *Ce qu'il fallait faire*; the translation of the Latin phrase *quod erat faciendum*. Compare the related phrase C.Q.F.D., *ce qu'il fallait démontrer*.

---

80 The term my^2 in the numerator of the right-hand side is incorrectly given as my in the original.
84 The original incorrectly has $2y$ in the denominator.
91 The original incorrectly has yd in the denominator instead of dy.
99 $x\,dx$ is incorrectly given as $x\,dy$ in the original.

dans laquelle difference, si on prend encore la difference, l'on aura en supposant dx constant, et mettant à sa place la lettre b

$$\text{D.}\quad \frac{\begin{array}{c}[2bmmx^{4m-2}\,dx - bmx^{4m-2}\,dx - x^{2m}b\,dx - 2bmmx^{2m}\,dx \\ + bmx^{2m}\,dx + bx^2\,dx - bmmx^{4m-2}\,dx + 2bmx^{2m}\,dx - bxx\,dx]\end{array}}{[x^{2m} - xx]^{\frac{3}{2}}} = ddy \qquad \text{(I.32)}$$

laquelle étant égalée à Zero; et divisée par $b\,dx$ c'est-à-dire par dx^2, donnera

$$\text{E.}\quad mmx^{4m-2} + 3mx^{2m} = mx^{4m-2} + x^{2m} + 2mmx^{2m} \qquad \text{(I.33)}$$

qui se réduit encore en divisant par x^{2m} à

$$mmx^{2m-2} + 3m = mx^{2m-2} + 1 + 2mm; \qquad \text{(I.34)}$$

d'où l'on tire

$$x^{2m-2} = \frac{1 + 2mm - 3m}{mm - m}, \qquad \text{(I.35)}$$

ou

$$x^{2m-2} = \frac{2m-1}{m} \qquad \text{(I.36)}$$

qui est une formule générale pour determiner les points d'inflexion de ces courbes, de quelque degré qu'elles soient.

J'ai cherché la quadrature de la première de ces courbes, qui est du 3me genre de cette manière; y étant égale à

$$\tfrac{x}{a}\sqrt{[xx - aa]}, \qquad \text{(I.37)}$$

l'Element $y\,dx$ sera

$$\tfrac{x\,dx}{a}\sqrt{[x^2 - a^2]}, \qquad \text{(I.38)}$$

et son integral **PAM**

$$\tfrac{1}{3a}[xx - aa]^{\frac{3}{2}}. \qquad \text{(I.39)}$$

---

113 première] premiere

114 égale] egale

---

102 $2bmx^{2m}\,dx$ is incorrectly given as $bmx^{2m}\,dx$ in the original.

II Problème Indéterminé.

Les mêmes choses (fig. 5) que dans le precedent étant données, on demande la nature de la Courbe dont la propriété est telle que

$$\mathbf{CM} \times \mathbf{QM} = [\mathbf{AC}]^2. \tag{II.1}$$

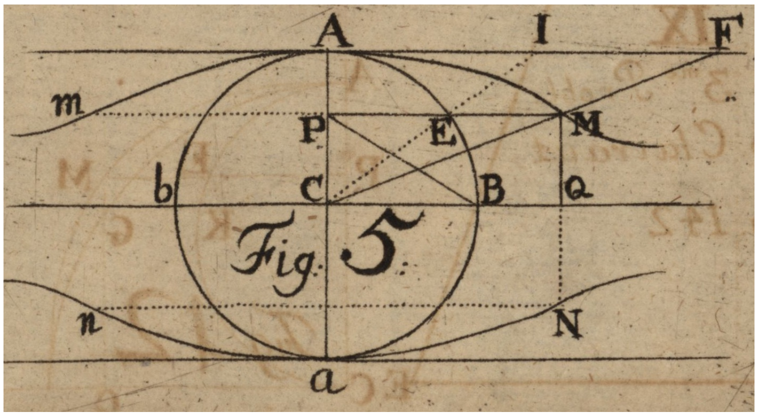

Figure 5

1. En nommant toujours **AC**, a; et **CP** ou **QM**, x; **PM** ou **CQ**, y; l'on aura aussi

$$\mathbf{CM} = \sqrt{[xx + yy]} \tag{II.2}$$

et par la propriété de cette courbe

$$x^4 + xxyy = a^4 \tag{II.3}$$

qui est une Equation du 4$^{\text{me}}$ degré, et qui marque que la courbe est du 3$^{\text{me}}$ genre.

2. Il est clair qu'on tire de cette Equation:

1. Que la Courbe passe des deux côtes de l'axe, et que la partie **Am** est semblable et égale à la partie **AM**.
2. Que la courbe a deux parties égales et semblables **an**, **aN** en dessous, et autant distantes du point **C** que les deux premières.
3. Que x augmentant, y diminue; d'où l'on voit, que les deux premières parties n'en font qu'une, qui prend son origine en **A**, de même que les deux secondes n'en font qu'une, qui commence en **a** autant distante de **C** que **A**, et que la ligne **QCq** est asymptote aux quatre parties **AM**, **Am**, **Na**, **an**, de la Courbe.

129 côtes] côtez
131 **an**] **am**
131 **aN**] **aM**
133 diminue] diminuë
135 **QCq**] **QCQ**

3. On tire encore de la même Equation cette propriété à la Courbe, qui est que si l'on fait sur **AC** un quart de cercle,

$$\mathbf{PE} \times \mathbf{PB} = \mathbf{CP} \times \mathbf{PM}; \tag{II.4}$$

l'on en tire encore que

$$x.a :: a.\sqrt{}[xx + yy] \tag{II.5}$$

qui lui peut donner une construction fort simple.

4. A cause que la propriété de cette courbe, ressemble à celle de l'hyperbole par rapport aux Asymptotes, on peut, supposer une équation générale

$$x^{-m} = \sqrt{}[xx + yy] \tag{II.6}$$

pour en exprimer la nature à tous les degrés à l'infini, de même que

$$x^{-m} = y \tag{II.7}$$

exprime la nature de toutes les hyperboles aux asymptotes.

5. Si l'on fait sur **CA** un quart de cercle, il est clair que **CM** est moyenne proportionnelle entre **CG** et **CF**, ce qui fait connaître que l'on peut encore généraliser cette courbe à l'infini, par le moyen de cette propriété, en supposant que **CM** est la première du nombre n de moyennes proportionnelles entre **CG** et **CF**; et pour en avoir l'équation générale, on fera cette proportion

$$\overbrace{a}^{\mathbf{CG}} \;.\; \overbrace{\tfrac{a}{x}[xx + yy]^{\frac{1}{2}}}^{\mathbf{CF}} :: \overbrace{a^{n+1}}^{\mathbf{CG}^{n+1}} \;.\; \overbrace{(\overline{xx + yy})^{\frac{n+1}{2}}}^{\mathbf{CM}^{n+1}} \tag{II.8}$$

ou en abrégeant

$$1 \,.\, \tfrac{1}{x} :: a^{n+1} \,.\, \overline{xx + yy}^{\frac{1}{2}} \tag{II.9}$$

qui donne l'équation cherchée,

$$x^{-\frac{1}{n}} = [xx + yy]^{\frac{1}{2}} \tag{II.10}$$

qui devient celle qu'on a trouvée No. 4, en faisant $+\frac{1}{n} = +m$ ou $-\frac{1}{n} = -m$.

---

144 équation] equation
144 générale] generale
146 degrés] degrez
150 connaître] Original: connoitre, an archaic spelling.
150 généraliser] generaliser
151 propriété] proprieté
151 première] premiere
152 l'équation] l'equation
155 abrégeant] abregeant
157 l'équation] l'equation

159] This seems redundant.

6. Si dans cette Equation (fig. 6) l'on fait $n = 2$ c'est-à-dire, que dans la première l'on fasse $m = \frac{1}{2}$, l'équation deviendra

$$a^3 = x^3 + xyy, \tag{II.11}$$

laquelle fournit cette construction pour trouver les points de la courbe, supposant x déterminé, à chaque fois qu'on en veut trouver un.

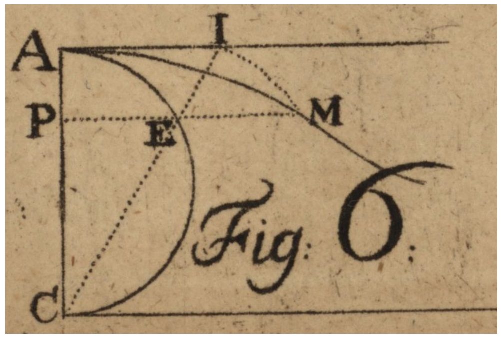

Figure 6

Faites sur **AC** un demi cercle qui coupera **PM** en **E**, par où vous mènerez **CEI**, et ferez **CM** = **CI** qui déterminera le point **M** à la courbe.

7. On peut aussi par le moyen d'une de ces courbes, trouver entre deux lignes données la première du nombre n, de moyennes proportionnelles, comme on le peut voir à la seule inspection de le figure 7.

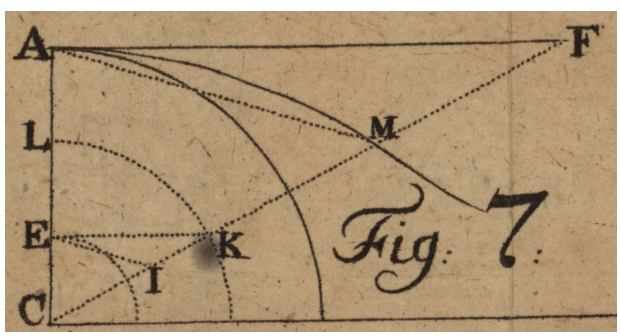

Figure 7

---

160 première] premiere
161 l'équation] l'equation
162 déterminé] determiné
165 par où] paroù
166 déterminera] determinera
168 première] premiere
168 comme] coẽ.

8. Si l'on veut d'un point donné (fig. 8) sur une de ces courbes, y mener un tangente, on se servira de l'équation générale

$$x^{-m} = \sqrt{[xx + yy]}. \tag{II.12}$$

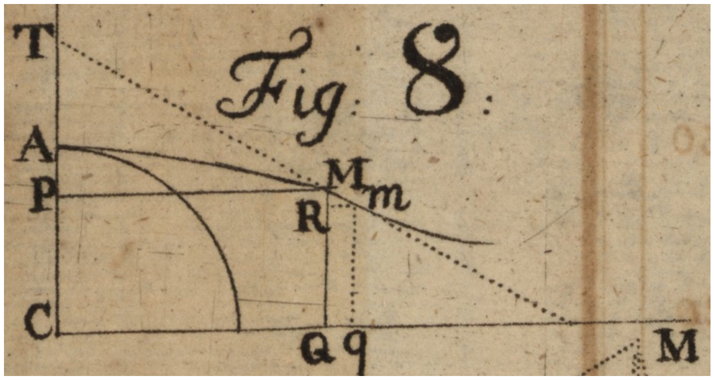

Figure 8

Mais comme cette Equation est la même, que celle, qu'on a formée Problem I No. 4, excepté que dans celle ci m est negative; il faut donc aussi, que les sous-tangentes soient les mêmes, avec cette difference, que m sera negatif au lieu de positif, et l'on aura pour ces sous-tangentes

$$\frac{y\,dx}{dy} = \frac{yy}{-mx^{-m-1} \times [xx + yy]^{\frac{1}{2}} - x} \tag{II.13}$$

et

$$\frac{x\,dy}{dx} = \frac{-mx^{-m}\sqrt{[xx + yy]} - xx}{y} = \frac{-mx^{-2m} - x^2}{y} \tag{II.14}$$

et si l'on met pour m sa valeur $\frac{1}{n}$ on aura encore

$$\frac{y^2}{-\frac{1}{n}x^{\frac{-n-1}{n}}\sqrt{x^2 + y^2} - x} = \frac{y\,dx}{dy} \tag{II.15}$$

et

$$\frac{x\,dy}{dx} = \frac{-\frac{1}{n}yy - \frac{1}{n}xx - xx}{y}. \tag{II.16}$$

Si dans ces sous-tangents; l'on fait $m = 1$ ou $n = 1$ l'on a

$$\frac{y\,dx}{dy} = \frac{-yyx}{2xx + yy} \tag{II.17}$$

et

$$\frac{x\,dy}{dx} = \frac{-2xx - yy}{y}; \tag{II.18}$$

si $m = \frac{1}{2}$ ou $n = 2$,

---

172 l'équation] l'Equat.

172 générale] generale

$$\frac{y\,dx}{dy} = \frac{-y^2 x}{\frac{3}{2}x^2 + y^2} \tag{II.19}$$

et

$$\frac{x\,dy}{dx} = \frac{-\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2}{y} \tag{II.20}$$

qui sont les sous-tangentes pour ces Courbes du 3^{me} et 4^{me} dégre.

9. Pour détermine les points d'inflexion de ces Courbes-ci; de quelque degré qu'elles soient, on se servira de la formule

$$x^{2m-2} = \frac{2m-1}{m} \tag{II.21}$$

trouvée (Art. I No. 9). Dans laquelle on sera m negative, ce qui donnera

$$x^{2m+2} = \frac{m}{2m+1} \tag{II.22}$$

qui-est la formule générale, pour déterminer les points d'inflexion de ces Courbes-ci; par exemple, pour celle du 4^{me} degré ou $m = 1$, ou bien $n = 1$, car la formule peut-être encore

$$x^{\frac{2n+2}{n}} = \frac{1}{2+n} \tag{II.23}$$

l'on a

$$x = a\,\sqrt[4]{\tfrac{1}{3}}; \tag{II.24}$$

Si l'on fait $m = \frac{1}{2}$ ou bien $n = 2$,

$$x = a\,\sqrt[3]{\tfrac{1}{4}} \tag{II.25}$$

parce que $a = 1$ par la supposition. Comme cette Courbe ressemble assez à l'hyperbole aux asymptotes, de même que la courbe du Problème précédent ressemble assez à la Parabole, je leur ai donné le nom de Courbes des Médianes Paraboliques et Hyperboliques.

177 negatif] negative
177 positif] positive
194 sous-tangentes] soutangents
194 dégre] genre
200 générale] generale
201 4^{me}] 4
201 peut-être] peut être
207 parce que] parceque
208 précédent] precedent

179] The original has $x-$ instead of $-x$ in the denominator of the right-hand side.
204 The printing is ambiguous, as it appears the 4 is the exponent of a. However, in this case it goes with the radix, i.e. $\sqrt[4]{1/3}$.
206 This appears to be incorrect in the original: the fraction appears to be either $\frac{1}{3}$, but should be $\frac{1}{4}$.

III Problème Indéterminé.

Figure 9

En supposant (fig. 9) les mêmes choses que dans l'Art. I. Après avoir tiré par le point **G**, **QGM** parallèle à **CP**, on demande la nature de la courbe **AM**, qui passe par tous les points **M** des intersections de **PM** et **QGM**; c'est à dire, dont la propriété est telle, que

$$\mathbf{QG}.(\mathbf{CA} = \mathbf{QO}) :: \mathbf{QO}.(\mathbf{QM} = \mathbf{CP}). \tag{III.1}$$

1. En nommant toujours **AC**, a; **CP**, x; **PM**, y; **GQ** sera

$$\sqrt{[aa - yy]} \tag{III.2}$$

et l'on aura par les conditions du Problem

$$x.a :: a.\sqrt{[aa - yy]}; \tag{III.3}$$

d'où l'on tire

$$a^4 = aaxx - xxyy \tag{III.4}$$

212 Après] Apres

qui est une equation du 4^{me} degré et qui fait voir que la Courbe est du 3^{me} genre.

2. On tire de cette Equation

1. Que la courbe passe des deux côtes de l'axe, et que la partie **AM** est égale et semblable à la partie **Am**.
2. Que la courbe a encore deux autres parties **an**; **aN**, égales et semblables, et que les deux premières **Am**, **AM**, prennent leur origine en **A**, de même que ces deux ci **an**, **aN** commencent en **a**, autant éloigné de **C** que **A**.
3. Que x augmentant, y augmente aussi, jusqu'à ce que x étant ∞, $y = a$; et par conséquent les lignes **BK**, **bL** parallèles l'une à l'autre et à **AC**, sont asymptotes aux quatre parties de la courbe **AM**, **Am**, **aN**, **an**.

3. On tire aussi de l'Equation cette propriété à la Courbe, qui est que

$$\mathbf{CA} \times \mathbf{AF} = \mathbf{CP} \times \mathbf{PM}. \tag{III.5}$$

4. On peut aussi généraliser cette courbe à l'infini, en supposant que **OQ** est le premier du nombre n de moyennes proportionnelles entre **GQ** et **QM**. Pour en avoir l'Equation générale, on fera cette proportion

$$\overbrace{(aa-yy)^{\frac{1}{2}}}^{\mathbf{GQ}} \,.\, \overbrace{x}^{\mathbf{QM}} :: \overbrace{(aa-yy)^{\frac{n+1}{2}}}^{\mathbf{QG}^{n+1}} \,.\, \overbrace{a^{n+1}}^{\mathbf{QO}^{n+1}} \tag{III.6}$$

D'où l'on tire

$$a^{n+1} = x \times [aa-yy]^{\frac{n}{2}} \tag{III.7}$$

qui est l'equation cherchée, en y supposant $n = 2$, l'on a

$$a^3 = a^2x - y^2x, \tag{III.8}$$

ce qui fournit cette construction, pour trouver un point de la courbe (fig. 10.) en supposant x déterminé à chaque fois; Faites sur **CP** un demi cercle **CFP**, qui coupera **AF** au point **F**, d'où il faut tirer **CF**, et par le point **G** où cette ligne coupe le quart de cercle **AGB**, mener

---

224 côtes] côtez

227 premières] premieres

229 conséquent] consequent

230 les lignes **BK**, **bL**] The original has **BQ** and **Bq** respectively. This clearly is an error, since they are perpendicular, and do not function as asymptotes to the curve.

---

217 aa is incorrectly given as xx.

QGM parallèle à **CP**, et alors cette ligne **QGM** coupera **PM** au point cherché **M**.

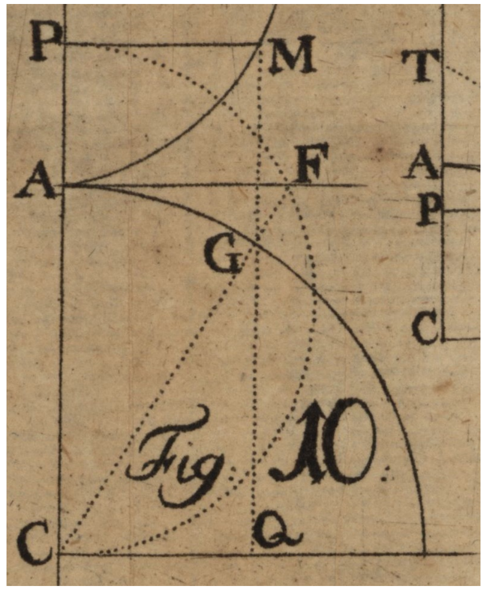

Figure 10

5. Pour mener une tangente à une de ces courbes en general, par un point donné dessus, on prendra la differential de l'équation

$$a^{n+1} = x[aa - yy]^{\frac{n}{2}} \tag{III.9}$$

et l'on aura

$$0 = [aa-yy]^{\frac{n}{2}}\,dx + x \times \tfrac{n}{2}[aa-yy]^{\frac{n}{2}-1} \times (-2y\,dy) = [aa-yy]^{\frac{n}{2}}\,dx - nxy[aa-yy]^{\frac{n}{2}-1}\,dy \tag{III.10}$$

d'où l'on tire

$$yx[aa - yy]^{\frac{n-2}{2}} n\,dy = [aa - yy]^{\frac{n}{2}}\,dx \tag{III.11}$$

qui donne

$$x\frac{dy}{dx} = \frac{aa - yy}{ny} \tag{III.12}$$

ce qui donne un moyen très facile de mener une tangente à une de ces courbes quelconques, car il n'y a qu'à prendre la partie $\frac{1}{n}$ de la sous-tangente du cercle **AGB** au point **G** où la

234 généraliser] generaliser
234 premier] pr[e]
235 moyennes] moyeñes
235 **QM**] **QM** is incorrectly given as **GM**.
235 l'Equation] l'Equat.
236 générale] generale
240 l'equation] l'equat.

perpendiculaire **QM** le coupe, et la mettre du côté opposé pour sous-tangente de la courbe. Par exemple, pour celle du 4^me^ degré, c'est à dire, lorsque $n = 1$, l'on a la sous-tangente égale à celle du cercle; pour celle du 3^me^ degré où $n = 2$, l'on a la sous-tangente égale à la moitié de celle du cercle, etc. J'ai trouvé que l'intégrale de l'Element $x\,dy$ de la première de ces courbes, depend de celle du cercle, car

$$x = \frac{aa}{\sqrt{[aa-yy]}} \tag{III.13}$$

et

$$x\,dy = \frac{aa\,dy}{\sqrt{[aa-yy]}}. \tag{III.14}$$

D'où l'on voit, que **QMAC**, $S.x\,dy$ est égale au produit de **AC** par **AG**, c'est à dire à deux fois le segment **ACG**. Si **CQ** devient **CB**; **CAG** deviendra le quart de cercle **ACBG**, qui sera alors égal à la moitié de l'espace indéfini **ACBKV** et par conséquent au triligne **AGBKV**.

---

248 differential] differ.
248 l'équation] l'equation
256 très] tres
257 sous-tangente] soutangente
258 côté] coté
259 sous-tangente] soutangente
260 3^{me}] 3
260 sous-tangente] soutangente
266 **QMAC**] **QAMC**
268 **ACBKV**] **ACBVK**
269 **AGBKV**] **AGBVK**

IV Problème Indéterminé

Ayant supposé les mêmes choses (fig. 11) que dans l'art. II. après avoir tiré par le point **Q**, **GMQ** parallèle à **AC** on demande la nature de la courbe qui passe par tous les point **M**, intersections de **PM** et de **QM**, c'est à dire, dont la propriété est telle que **QG**.**QM** :: **QM**.**QO** = **AC**.

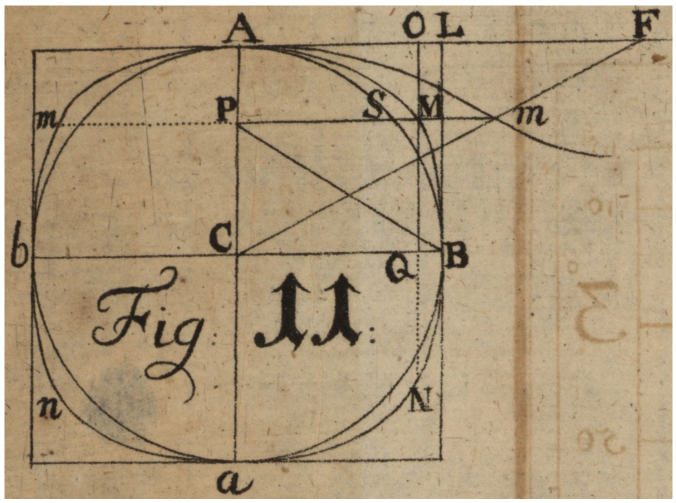

Figure 11

1. En nommant toujours **AC** ou **QO**, a; **CP** ou **QM**, x; **PM** ou **CQ**, y; l'on a

$$\mathbf{GQ} = \sqrt{[aa - yy]} \tag{IV.1}$$

et par les qualités du problème

$$\sqrt{[aa - yy]}.x :: x.a, \tag{IV.2}$$

d'où l'on tire

$$a^4 - aayy = x^4, \tag{IV.3}$$

qui est l'équation de la courbe, et qui étant du 4^{me} degré fait voir, que la courbe est du 3^{me} genre.

---

271 après] apres
272 parallèle] parallele
273 propriété] propriete
278 qualités] qualitez
278 problème] probleme
282 l'équation] l'equation

---

271 (fig. 11)] The original does not have a label at **G**.

2. On tire de l'Equation qu'on vient de trouver

1. Que la courbe passe des deux côtés de l'axe **ACa**, et que la partie **Am** est égale et semblable à la partie **AM**, et que ces deux parties prennent leur origine en **A**.
2. Que la courbe passe des deux côtés de l'axe **BCb** et que la partie **an** est égale et semblable à la partie **aN**, et que ces deux parties prennent leur origine en **a**.
3. Que x augmentant, y diminué, d'où l'on voit que la courbe rentre en elle même, et que ces quatre parties **AB**, **Ab**, **aB**, **ab**, se joignent au points $\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{B}$.

3. On tire encore cette propriété de la courbe, que

$$\mathbf{PS} \times \mathbf{PB} = \mathbf{CA} \times \mathbf{QC}. \tag{IV.4}$$

4. On peut aussi généraliser cette courbe, en supposant que **QM** est la 1re du nombre n de moyennes proportionnelles, entre **QG** et **QO**, ce qui donne cette proportion

$$[aa - yy]^{\frac{1}{2}}.a :: [aa - yy]^{\frac{n+1}{2}}.x^{\frac{n+1}{2}} \tag{IV.5}$$

qui se réduit à

$$1.a :: [aa - yy]^{\frac{n}{2}}.x^{n+1} \tag{IV.6}$$

d'où l'on tire

$$x^{n+1} = a \times [aa - yy]^{\frac{n}{2}} \tag{IV.7}$$

qui est l'équation générale.

5. Si $n = 2$ l'Equation devient

$$x^3 = a^3 - ay^2 \tag{IV.8}$$

dans laquelle **QM** représente la première de deux moyennes proportionnelles entre **QG** et **QO**. Pour la construire, faites sur **AC** (fig. 12) un demi cercle **AEC** qui coupera **PM** au point **E** par où vous tirerez **CE**, en suite vous ferez **CK** = **CP**, et mènerez par ce point **K**, **KG** parallèle à **PM**, qui coupera le quart de cercle au point **G**, d'où ayant élevé **GM**

---

285 côtés] cotez
287 côtés] cotez
289 diminué] diminuë
291 propriété] proprieté
293 généraliser] generaliser
294 donne] doñe
300 l'équation] l'equat.
300 générale] gener.

---

295 The fourth term x^{n+1} is incorrectly given as $x^{\frac{n+1}{2}}$ in the original.
299] $aa - yy$ appears $aa\ yy$ in the original.

perpendiculaire à **PM**, le point **M** sera ainsi déterminé à la Courbe.

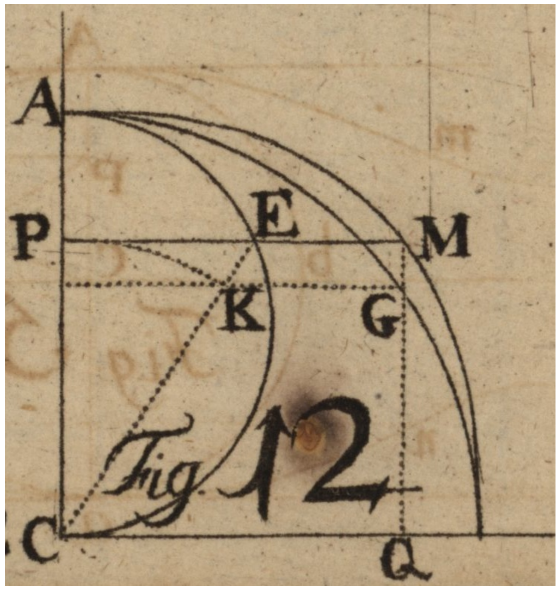

Figure 12

Ainsi chaque équation particulière servira, à construire la Courbe qui lui convient; et une de ces courbes étant une fois construire, elle servira à trouver entre deux lignes données suivant le nombre qu'on aura assigné à l'exposant n du genre de la Courbe, la première d'autant de moyennes proportionnelles que ce nombre n contient d'unites; par exemple, en se servant de la Courbe qu'on vient de construire, où l'on a supposé $n = 2$, on peut trouver entre deux lignes données **p**, **q**, la 1[re] de deux moyennes porportionnelles ainsi; Soit donc donnée la Courbe qu'on vient de construire avec son quart de cercle **AMB** (fig. 13).

---

303 représente] represente
303 première] premiere
306 parallèle] parallele
306 élevé] elevé
307 déterminé] determiné
309 équation] equation
309 particulière] particuliere
311 première] premiere
312 d'unites] d'unitez
314 moyennes] moy.
314 porportionnelles] prop

---

315 (fig. 13)] The reference to Figure 13 is missing in the original.

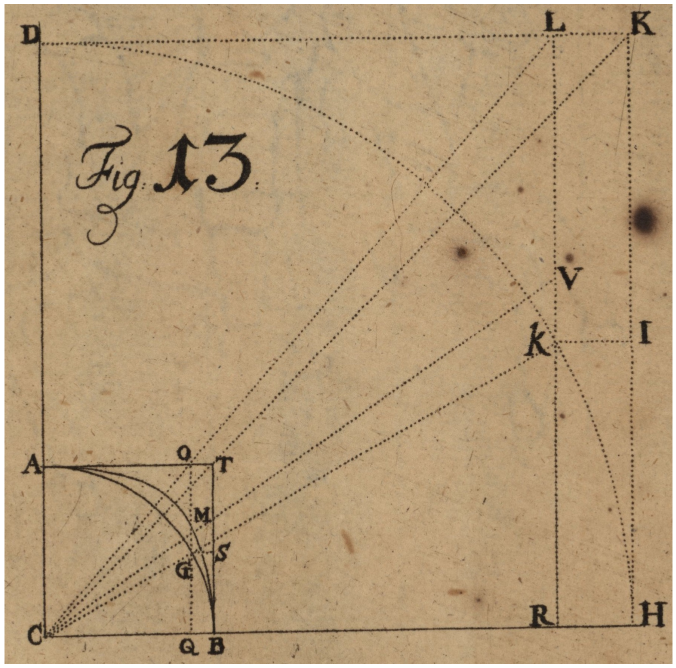

Figure 13

1. Prolongez les rayons **CA**, **CB**, et décrivez le quart de cercle **DH**, qui ait pour rayon la plus grande des deux lignes données **p**, **q**.
2. Faites les carrés **ATB**, **CDKH**.
3. Faites **HI** égale à la plus petite des deux lignes données et menez du point **I**, la droite **Ik** parallèle à **CH** et par le point **k** où elle coupe le quart de cercle, menez **Lk** parallèle à **CD**.
4. Des points **L**, **K** tirez des lignes au centre **C**, et la ligne **AT** sera coupée au point **O**, au même raison que **DK** l'est au point **L**.
5. Tirez **QO** parallèle à **CA** qui sera coupée par la courbe au point **M**.
6. Tirez par les points **C** et **M** la droite **CMV** qui coupera **LR** au point **V**, de sorte que **RV** sera la première de deux moyennes proportionnelles entre **KR** ou **IH** et **LR** ou **KH**, de même que **QM**, par la propriété de la courbe, est la première de deux moyennes proportionnellesproportionn. entre **QG** et **QO**.

6. Pour mener une tangente à ces courbes en général, on prendra la difference de l'Equation

$$x^{n+1} = a \times [aa - yy]^{\frac{n}{2}} \tag{IV.9}$$

qui sera

$$[n+1]x^n\,dx = a \times \frac{n}{2}[aa - yy]^{\frac{n}{2}-1} \times (-2y\,dy). \tag{IV.10}$$

Où en reduisant et multipliant par x et divisant par dx,

$$\frac{[n+1]x^{n+1}}{ay} = -n[aa - yy]^{\frac{n}{2}-1}x\frac{dy}{dx}, \tag{IV.11}$$

d'où l'on tire

$$-\frac{n+1}{n} \times \frac{x^{n+1}}{a[aa-yy]^{\frac{n}{2}}} \times \frac{aa-yy}{y} = \frac{x\,dy}{dx}, \tag{IV.12}$$

où en réduisant encore,

$$-\frac{n+1}{n} \times \frac{aa-yy}{y} = x\frac{dy}{dx} \tag{IV.13}$$

qui est la sous-tangente de la courbe sur l'axe **CQ** et comme

$$\frac{aa-yy}{y} \tag{IV.14}$$

est celle du cercle **AGB** au point **G**, il s'ensuit, que la sous-tangente de la courbe est à celle du cercle comme $n+1$ à n, ce qui donne un moyen facile d'y mener une tangente; si l'on veut savoir le rapport de la sous-tangente de la 1re de ces courbes qui est du 3me genre, avec celle du cercle, l'on verra qu'il est double, car en faisant $n = 1$,

$$x\frac{dy}{dx} = \frac{2aa - 2yy}{y}. \tag{IV.15}$$

---

316 décrivez] decrivez
318 carrés] quarrez
320 **Ik**] **IK**
320 **Lk**] **LK**
320 parallèle] parallele
324 parallèle] parallele
326 première] prem.
327 propriété] proprieté
327 première] prem.
327 moyennes] moyenn.
327 proportionnelles]
329 général] general
329 l'Equation] l'Equat.
338 réduisant] reduisant
340 sous-tangente] Soutangente
343 comme] coñe
343 donne] doñe
344 savoir] sçavoir

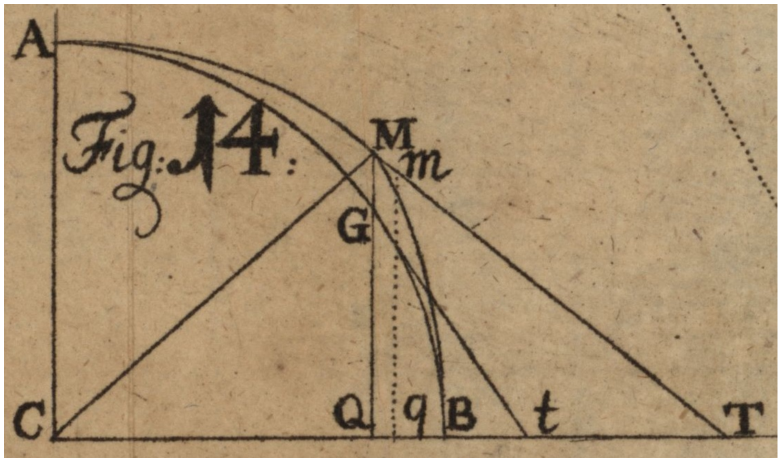

Figure 14

7. L'on remarquera (fig. 14), que toutes les lignes comme **CM** que j'appellerai rayons de la courbe, vont en augmentant depuis le point **A** jusqu'à un certain point **M**, et qu'après cela ces rayons diminuent, de sorte qu'à ce point **M** le rayon **CM** est le plus grand, pour trouver ce point **M** il faut exprimer **CM** en lettres ainsi; **QM** étant y et **QC**,

$$x = a^{\frac{1}{n+1}} \times [aa - yy]^{\frac{n}{2n+2}}, \tag{IV.16}$$

$$\mathbf{CM} = \sqrt{[xx + yy]} \tag{IV.17}$$

sera égale à

$$[a^{\frac{2}{n+1}} \times [aa - yy]^{\frac{n}{n+1}} + yy]^{\frac{1}{2}}. \tag{IV.18}$$

Dont la difference est:

$$(\tfrac{1}{2} \times [a^{\frac{2}{n+1}} \times [aa-yy]^{\frac{n}{n+1}} + yy]^{-\frac{1}{2}} \times [a^{\frac{2}{n+1}} \times [aa-yy]^{\frac{n}{n+1}-1} \times [\tfrac{n}{n+1} \times (-2y\,dy)] + 2y\,dy]) \tag{IV.19}$$

laquelle étant égalée à Zero, donnera

$$a^{\frac{2}{n+1}} \tfrac{n}{n+1} [aa - yy]^{\frac{-1}{n+1}} \times [-2y\,dy] + 2y\,dy = 0, \tag{IV.20}$$

d'où l'on tire en réduisant

$$a^{\frac{2}{n+1}} \times \frac{n}{n+1} = [aa - yy]^{\frac{1}{n+1}} \tag{IV.21}$$

où en élevant tout à la puissance $n+1$;

$$aa \times \frac{n^{n+1}}{\overline{n+1}^{n+1}} = aa - yy. \tag{IV.22}$$

---

349 qu'après] qu'apres

359 étant] etant

361 réduisant] reduisant

363 élevant] elevant

---

348 (fig. 14)] The reference to Figure 14 is missing in the original.

D'où l'on tire encore

$$y = \sqrt{[aa - aa \times \tfrac{n^{n+1}}{\overline{n+1}^{n+1}}]} \tag{IV.23}$$

qui est la valeur d'y, au point **M**, où **CM** est le plus grand. Si l'on fait $n = 1$ afin de savoir la valeur de ce plus grand **CM** dans la première courbe, l'on aura

$$y = \sqrt{[\tfrac{3}{4}aa]} \tag{IV.24}$$

ce qui donne en substituant cette valeur de y dans l'équation

$$x^4 = a^4 - aayy \tag{IV.25}$$

$$= \sqrt{[\tfrac{1}{2}aa]} \tag{IV.26}$$

donc

$$\sqrt{[xx + yy]} = \sqrt{[\tfrac{5}{4}aa]} \tag{IV.27}$$

qui est le plus grand rayon **CM**.

---

367 savoir] sçavoir

370 donne] doñe

Extrait des Registres de l'Academy Royal des Sciences, du 18 Mai 1726.

Mssrs. Nicolle et Pitot qui ont été nommés pour examiner un memoire de Géométrie fait par Mr. Clairaut le Fils âgé de douze ans et demi sur les propriétés et toutes les affections de quatre Courbes géométriques du 3^{me} genre, qu'il a trouvées, et par le moyen des quelles il a un moyen facile de trouver deux et tel nombre de moyennes proportionnelles qu'on voudra entre deux lignes données, en ayant fait leur rapport, la Compagnie a jugé que cet écrit faisait un grand éloge et des nouvelles méthodes qui vont si loin et si vite et de l'Auteur, qui dans une si grande jeunesse les sait déjà si bien manier, qu'on ne peut qu'attendre beaucoup de lui. En foi de quoi j'ai signé le present Certificat. À Paris ce 1 Septembre 1726. FONTENELLE, secrétaire perpétuel de l'Academie Royal des Sciences.

---

378 **l'Academy Royal des Sciences**] l'Acad. Roy. des Sciences

379 Mssrs.] Mrss.

379 ont] Original: avoient, an archaic spelling.

379 Géométrie] Geometrie

380 propriétés] proprietez

381 géométriques] geometriques

383 faisait] faisoit

384 vite] viste

385 sait] sçait

385 déjà] deja

385 lui] luy

386 foi] foi or soi?

387 secrétaire] secr.

387 perpétuel] perp.

387 l'Academie Royal des Sciences] l'Ac Roy. des Sc.